数理解析研究所講究録 1466 巻 2006 年 93-98



# A remark on Glauberman-Watanabe corresponding blocks with a normal defect group

田阪 文規 千葉大学 自然科学研究科
e-mail ftasaka@g.math.s.chiba-u.ac.jp

有限群 $G$ へ、$G$ の位数と素な可解群 $S$ が作用している時、$G$ の $S$-不変な既約指標と、$G$ の $S$ による中心可群 ($G^S$ と書く) の既約指標の間には、ある 1 対 1 対応 (Glauberman 対応) が存在することが知られていたが、[18] において、$S$ により centralise される defect group を持つという仮定のもとでは、その背後に、Brauer category が同値な ($p$-)block の 1 対 1 対応 (Watanabe 対応) が存在する、ということが示された。実際、[18] において、Glauberman 対応により、Watanabe 対応する blocks の間に、isotypy が引き起こされることが示されているが、その後、この指標レベルの現象を環論的に説明するものとして、blocks が normal defect group を持つ場合には、対応する blocks は、(Glauberman 対応を引き起こす [5]、trivial module を source として持つ bimodule により splended[9][5]) Morita 同値 [10]、であることが示されている。($p$-可解群の場合は [7][6] を参照。)

ここでは、Watanabe 対応する blocks が normal defect group をもつとき、Glauberman 対応を引き起こす、Morita 同値を与える bimodule が、block algebra を bimodule としてみて、片側 restriction、または、片側 induction して得られる bimodule の直既約因子として得られる、ということを注意する。(Glauberman 対応に関する基本的事実については [8] を、Puig の理論については、[17] を参照。)

以下、$p$ を素数、$(\mathcal{O}, K, k)$ を $p$-modular system で、完備離散付値環と、以下で考える群に対して分裂体となる標数 0 の商体と、標数 $p$ の代数閉体となる剰余体からなるものとする。

**定理 1 (Glauberman[4]).** 任意の組 $(G,S)$ (ここで、$G$ は有限群、$S$ は $G$ と位数が素な可解群で $G$ の自己同型群の部分群であるもの) に対し、次の条件を満たす全単射 $\pi(G,S)\colon \mathrm{Irr}(G)^S \to \mathrm{Irr}(G^S)$ が存在する。

(1) $T$ を $S$ の正規部分群とするとき、$\pi(G,T)$ は、$\mathrm{Irr}(G)^S$ と $\mathrm{Irr}(G^T)^S$ の間の全単射を与え、$\pi(G,S) = \pi(G^T, S/T) \circ \pi(G,T)$ を満たす。

(2) $S$ が、ある素数 $q$ に対する $q$-群のとき、$\pi(G,S)(\chi)$ は、$\chi$ の $G^S$ への restriction に現れる重複度が $q$ と素な唯一の既約指標 (実際、$q$ を法として $\pm 1$。)。ここで、$\chi$ は $G$ の $S$-不変な既約指標。

定理1の対応を既約指標の Glauberman 対応という。

**定理 2 (Watanabe[18]).** $G$ の $S$-不変な block $b$ が、$G^S$ に含まれる defect group $P$ を持つとすると、次が成り立つ。

(1) $b$ に属する $G$ の既約指標は全て、$S$-不変。

(2) 次の条件を満たす $G^S$ の block $w(b)$ が一意に定まる。: Glauberman 対応は、$b$ に属する既約指標と $w(b)$ に属する既約指標の間の全単射。

(3) block $w(b)$ は $P$ を defect group として持ち、$b$ と $w(b)$ の Brauer category は同値。

(4) blocks $b$ と $w(b)$ の間に perfect isometry（実際、より強く、isotypy）が存在する。

定理2（2）の対応を block の（Glauberman-）Watanabe 対応という。以下、$G$ の $p$-部分群 $P$ は、$S$ により centralise される（「Watanabe's situation」）とする。また、有限群 $G$ に、位数 $q$（$G$ の位数と素なある素数）の巡回群 $S$ が作用しているとして、statement を記す。(定理1 (1) より、始めの設定は、この設定に還元される。)

block algebra $\mathcal{O}Gb$ は、primitive interior $G$-algebra で、その defect multiplicity module $V$（$\overline{G}:=N_G(P_\gamma)/P$ 上の $k$ 係数の twisted group algebra。ここで、$P_\gamma$ は $b$ の defect pointed group。）を $\overline{G}^S$ 上の twisted group algebra へ restriction すると、重複度が $q$ と素な直既約因子（$V'$ とする）が唯一つ存在する（重複度は $q$ を法として $\pm1$）ことがいえる。実際、$V$ は、simple projective なので、$\mathcal{O}$ 上の module に lift でき、$K$ 係数の $\overline{G}$ 上の twisted group algebra 上の defect 0 の character が対応するが、それを $\overline{G}^S$ 上の twited group algebra に restriction すると、重複度が $q$ と素（$q$ を法として $\pm1$）なものが唯一つ現れ、それは、defect 0 の character であることが分かる。(適当な covering group を考え、Glauberman 対応を考える (cf.[6])。または、[3]。defect に関することは [2] を参照。) また、$V$（projevtive module）の $G^S$ への restriction の $V'$ 以外の直既約因子達の和（$W$ とする）に対応する $K$ 上の character の、各因子の重複度は $q$ の倍数だが、$k$ 上の twisted group algebra（$k$ は代数閉体）の Cartan 行列の行列式は $p$ べきであることと、$q$ と $p$ が素であることより、$W$ の各直既約因子の重複度も $q$ で割り切れることが従う。ここで、$V'$ と Puig 対応する $\mathcal{O}Gb$ の pointed group を $G^S_\beta$ とおき、$\beta$ に属するべき等元 $f$ に対し、$f\mathcal{O}Gbf$ と同

型な primitive interior $G^S$-algebra を $(\mathcal{O}Gb)_\beta$、$f\mathcal{O}Gb$ と同型な（直既約）$\mathcal{O}[G^S \times G]$-module を $M$ とおく。

上の記号のもと、次のことを示すことができる。

**定理 3.** $G$ の $S$-不変な block $b$ が、$S$ により centralise される、normal な defect group $P$ を持つとき、$(\mathcal{O}Gb)_\beta$ と $\mathcal{O}G^S w(b)$ は、primitive interior $G^S$-algebra として同型。

特に、

(1) $b$ と $w(b)$ は、同型な source algebra を持つ。すなわち、$b$ と $w(b)$ は、splendid Morita 同値 [9][5]。

(2) $M$ は $b$ と $w(b)$ の間の Morita 同値を与える。また、$\mathcal{O}Gb$-module の category から、$\mathcal{O}G^S$-module の category への restriction functor は、直既約因子に $M$ が重複度 $qn \pm 1$ で現れ（$n$ はある整数）、その他の直既約因子達の重複度が $q$ の倍数であるような $\mathcal{O}[G^S \times G]$-module を $\mathcal{O}G$ 上 tensor する functor と同型。よって、Glauberman 対応を引き起こす、Morita 同値を与える bimodule が存在する [5]。

次は、Green 対応より、normal defect の場合に還元でき、その場合、$M$ は Morita 同値を引き起こす bimodule となることを利用する。すなわち、$\mathcal{O}Gb$ の $\mathcal{O}[G \times 1]$-module としての、また、$M$ の $\mathcal{O}[G^S \times 1]$-module としての自己準同型環は、primitive interior $G$-algebra として $\mathcal{O}Gb$ と同型（Puig による Morita の定理の言い替え ([15]Prop.6.5)）なので、$\mathcal{O}Gb$ の $\mathcal{O}[G \times G^S]$-module としての、また、$M$ の $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-module としての構造は、$\mathcal{O}Gb$ の $G^S$-不変な subalgebra における、$b$ の分解の様子、よって、Puig 対応より、$\mathcal{O}Gb$ の defect multiplicity module を、$\overline{G}^S$ へ restriction したときの様子から分かる。また、$M$ の dual を $\mathcal{O}[G \times G]$-module に、また、$\mathcal{O}G^S w(b)$ を $\mathcal{O}[G^S \times G]$-module に induction した module の様子は、$\mathcal{O}G^S w(b)$ の defect multiplicity module を、$\overline{G}$ へ induction した module の様子で分かる。(cf.[1])

**系 4.** $b$ を $G$ の $S$-不変な block で、$S$ により centralise される defect group を持つものとする。このとき、直既約 $\mathcal{O}[G \times G]$-module$\mathcal{O}Gb$ を $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-加群に restriction すると、vertex $\Delta P$ を持つ直既約因子で重複度が $q$ と素であるものが、唯一つ存在し（実際、重複度は、$q$ を法として 1）、それは、$\mathcal{O}G^S w(b)$ と同型。また、直既約 $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-module$\mathcal{O}G^S w(b)$ を $\mathcal{O}[G \times G]$-加群に induction すると、vertex $\Delta P$ を持つ直既約因子で重複

度が $q$ と素であるものが、唯一つ存在し（実際、重複度は、$q$ を法として１）、それは、$\mathcal{O}Gb$ と同型。

**注意 5.** normal defect group を持つ block algebra は、$PE$（ここで、$P$ は defect group,$E$ は inertial quotient）上の twisted group algebra と Morita 同値なので（[11][13]）、[10][5] では、Watanabe 対応している blocks の、対応する 2-cocycle を比べているが、ここでは、次のようにして source algebra の同型を得ている。すなわち、$i = i'f = fi'$（ここで、$i$ は $b$ の、$i'$ は $w(b)$ のある source idempotent、$f$ は $\beta$ のある元）が normal defect group をもつときは成り立つので、$f$ を両側からかけることにより、$w(b)$ の source algebra $i'\mathcal{O}G^S i'$ から、$b$ の source algebra $i\mathcal{O}Gi$ への interior $P$-algebra hom. を得るが、normal defect group を持つ block の source algebra は、[17]Th.44.3 のような $\mathcal{O}$-basis をもつことから、これは同型になる。

**注意 6.** 定理３（２）の first と second statement より、$M$ が Glauberman 対応（Brauer character でも）を引き起こすことは明らかだが、これは、Glauberman 対応の「sign」は block で共通であることは意味しているが、restriction で Glauberman 対応する character の重複度が $M$ の重複度で出てくる、という主張ではない。

**注意 7.** [16][14] において、primitive interior $G$-algebra と、「$G$-triple」(defect group と"source algebra"と"defect multiplicity module"からなる。）の「ある同値類」の間に、１対１対応が存在することが示されている（微妙な論点が多いので [16][14] を参照して下さい。）が、定理３の上の statement は、$S$ により centralise される defect group を持つ、$S$-不変な $G$ の block algebra に対し、その「$G$-triple」の第３項を「Glauberman 対応」させた、「$G^S$-triple」（よって、対応する primitive interior $G^S$-algebra）を考えることができる、ということ。(他に、例えば、$S$-不変な simple $kG$-module の自己準同型環からなる primitive interior $G$-algebra に対しても、同様のことを考えることができる。) これは、$G^S$ が defect group $P$ の normalizer を含むときは、「primitive interior $G$-algebra の Green 対応」（$N_G(P)$ を含む群 $H$ に対し、「$G$-triple」を「$H$-triple」とみて（$P$ の $G$ における normalizer と $H$ における normalizer は等しい）対応を与えたもの [16]。加群の Green 対応は、（実質）Puig により、$G$-algebra の pointed groups の対応に一般化されていて（直既約 module の自己準同型環の「Green 対応」は Green 対応の自己準同型環）、block algebra の「Green 対応」は、block algebra とは限らないが、加群の Green 対応が、Morita 型の stable 同値

を与えていて、simple module が simple module と対応しているときは、Brauer 対応する block algebras が、「Green 対応」していることは、よく知られている。)。この対応で、block algebra は、block algebra と対応するとは限らないが、normal defect group を持つということが、Watanabe 対応する block algebras が、この対応関係にあることの、一つの十分条件になっている、というのが、定理 3 の first statement。

付記 ; 本稿の作成にあたり、特に、北海道教育大学の奥山哲郎先生にお世話になりました。深く、感謝します。

## 参考文献

[1] L. Barker, Induction,restriction and $G$-algebras, Comm.algebra. **22** (1994), 6349–6383.

[2] E. C. Dade, Counting characters in blocks$II$, J. Reine Angew. Math. **448** (1994),97–190.

[3] E. C. Dade, A new approach to Glauberman's correspondence, J. Algebra **270** (2003), 583–628.

[4] G.Glauberman, Correspondence of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. **20** (1968),1465–1488.

[5] M. E. Harris, Glauberman-Watanabe corresponding $p$-blocks of finite groups with normal defect groups are Morita equivalent, Trans.of the A. M. S.(2004)

[6] M. E. Harris and M. Linckelmann, On the Glauberman and Watanabe correspondences for blocks of finite $p$-solvable groups, Trans. of the A. M. S. **354**(9)(2002),3435–3453.

[7] H. Horimoto, A note on the Glauberman correspondence of $p$-blocks of finite p-solvable groups, Hokkkaido Math. J. **31** (2002), 255–259.

[8] I.M.Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press (1976).

[9] S. Koshitani, A remark on Glauberman-Watanabe correspondence of $p$-blocks of finite groups, preprint (2002)

[10] S.Koshitani and G.O.Michler, Glauberman correspondence of $p$-blocks of finite groups, J. Algebra **243** (2001),504–517.

[11] B. Külshammer, Crossed products and blocks with normal defect groups, Comm.Algebra **13** (1985),147–168.

[12] L. Puig, Pointed groups and construction of characters, Math. Z. **176**(1981),265–292.

[13] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Alg. **116**(1988),7–129.

[14] L. Puig, On Thévenaz' parametrization of interior $G$-algebras, Math. Z. **215**,321–335.

[15] L. Puig, "On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks", Birkhauser (1999).

[16] Thévenaz, The parametrization of interior algebras, Math. z. **212** (1993), 411–454.

[17] Thévenaz, "$G$-Algebras and Modular Representation Theory", Oxford University Press (1995).

[18] A. Watanabe, The Glauberman character correspondence and perfect isometries for blocks of finite groups, J. algebra **216** (1999),548–565.